Cohomologie des Groupes Classiques

I Rappels sur les algèbres de Hopf (Séminaire Cartan XI, Exp. 2 Zisman)

k = corps, A = k-algèbre

Déf A est une algèbre de Hopf si A est munie de

k-linéaires

$\underbrace{\Delta : A \to A \otimes A, \quad \varepsilon : A \to k, \quad S : A \to A}$ qui vérifient des relations de compatibilité "naturelle" (ex: $(S \otimes id)\Delta(a) = (id \otimes S)\Delta(a)$, $\forall a \in A$ ...) Elle est co-commutative si $\Delta(a) = \sigma(\Delta a)$ $\forall a$ où $\sigma : A \otimes A \to A \otimes A$ envoie $a \otimes b \mapsto b \otimes a$.

Exemples Typiques:

⓪ En géom. alg: les sections d'un schéma en groupes sont une alg. de Hopf, qui est commutative et qui est co-commutative $\Leftrightarrow$ le schéma est commutatif. Les co-machins reflètent l'équivalence opposée entre k-schémas affines et k-algèbres.

① [Cas de $\mathbb{A}^n_k \simeq \mathbb{G}_a^n$]: $A = k[X_1, \dots, X_n]$ a une structure d'Algèbre de Hopf $\Delta(X_i) \mapsto 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$, $\varepsilon(X_i) = 0$ et $S(X_i) = -X_i$.

② $A = \Lambda_k(y_1, \dots, y_n)$ algèbre extérieure en $y_1, \dots, y_n$ ($y_i \wedge y_j = -y_j \wedge y_i$) avec $\Delta(y_i) = 1 \otimes y_i + y_i \otimes 1$:

$$\Delta(y_i \wedge y_j) = 1 \otimes (y_i \wedge y_j) + y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i + (y_i \wedge y_j) \otimes 1.$$

③ Sur $T(k^n)$ = alg tensorielle $\to$ Une structure d'où ① et ② proviennent.

Les exemples ① et ② sont des alg. de Hopf graduées :

$$\Delta(A^{(k)}) \subseteq (A \otimes A)^k = \bigoplus_{i+j=k} A^{(i)} \otimes A^{(j)}.$$

1) $k[X_1 \_ X_n]$ est comm. et co-commutative

2) $\Lambda_k(y_1 \_ y_n)$ est anti-commutative.

④ On peut prendre $k[X_1, \dots, X_n] \otimes \Lambda_k(y_1, \dots, y_m)$ et le munir d'une structure d'alg de Hopf qui est anti-comm. graduée : $z_i \cdot z_j = (-1)^{i \cdot j} z_j \cdot z_i$ si z_i, z_j sont homogènes en degrés i et j. $\left(\Delta(z_i) = 1 \otimes z_i + z_i \otimes 1 \ , z \in \{x, y\} \right)$

$\deg(X_i) = 2i$ et $\deg(y_i) = 2i-1$

Théorème (Hopf) Si A est une k-algèbre de Hopf graduée et graduée-anti-commutative et $\mathrm{car}(k) = 0$, alors

$$A \simeq k[X_i : i \in I] \otimes \Lambda_k(y_j : j \in J)$$

où les X_i sont concentrés en degrés pairs, les y_i sont en degrés impaires.

Si A est de dimension finie sur k, il n'y a que la partie extérieure, et $A \simeq \Lambda_k(y_1, \dots, y_n)$.

A de Hopf $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ker}(\varepsilon : A \to k) = I_A$ ($= A^+$ dans les cas usuels) : les éléments primitifs de A sont les $x \in I_A$ tq.

$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$: ils sont aussi les éléments de $\mathrm{Ker}(\Delta^+ : A^+ \to A^+ \otimes A^+)$

$\hookrightarrow$ Leray a montré que si une alg. de Hopf graduée est purement anti-comm sur k de $\mathrm{car}(k) = 0$ ($\Rightarrow$ alg. extérieure), elle peut être engendrée par des y_i de degrés impaire et primitifs.

II Algèbres de Hopf provenant de la cohomologie

1 Groupes topologiques

G = grp top. $\Rightarrow$ Künneth donne

$$H^*(G \times G, A) \simeq H^*(G, A) \otimes H^*(G, A)$$

et on obtient une structure d'algèbre de Hopf sur $H^*(G, A)$ par $\cup : H^*(G, A) \otimes H^*(G, A) \longrightarrow H^*(G, A)$

$$\Delta : H^*(G, A) \xrightarrow[H^*(m_G)]{} H^*(G \times G, A) \simeq H^*(G, A) \otimes H^*(G, A).$$

$\Rightarrow$ Les propriétés du cup-produit montrent qu'elle est anti-comm. graduée et si $A = k$ de car 0, Hopf s'applique

$$H^*(G, A) \simeq k[X_i : i \in I] \otimes \Lambda_k(y_j : j \in J).$$

Si G est de Lie $\Rightarrow$ $H^i(G, A) = 0$ $i >> 0$ et il n'y a que la partie extérieure. Leray s'applique et on trouve $H^*(G, A) = \Lambda_k(y_1, \dots, y_n)$ où $\begin{cases} \deg(y_i) = \text{impair} \\ y_i = \text{primitif} \end{cases}$

② H-espaces (Espaces de Hopf).

Déf Un espace top. X est de Hopf (ou H-espace) s'il existe une application continue $\wedge : X \times X \longrightarrow X$ et un élément $e \in X$ tel que les applications $x \mapsto x \wedge e$ et $x \mapsto e \wedge x$ sont homotopes à l'identité id_X (et les flèches bleues

$$\begin{tikzcd} X\times X\times X \arrow[r, "(\wedge, id)"] \arrow[d, "(id,\wedge)"'] \arrow[dr] \arrow[dr, shift left] & X\times X \arrow[d, "\wedge"] \\ X\times X \arrow[r, "\wedge"'] & X \end{tikzcd}$$

sont homotopes). Un H-espace X est H-commutatif si $\wedge : X\times X \rightarrow X$ est homotope à la composée $X\times X \xrightarrow{\sigma} X\times X \xrightarrow{\wedge} X$ $\quad \sigma(x,y) = (y,x)$.

Ex :
⓪ $X = G =$ groupe topologique

① Pour tout espace T, et $t \in T$, l'espace des lacets basés en t $(\gamma(0)=\gamma(1)=t)$ $\Omega_t T$ est un H-espace où $e =$ chemin constant en t.

② $SO(n) \subseteq SU(n)$ n'est pas normal $\Rightarrow SU(n)/SO(n)$ n'est pas un grp top. mais il y a une structure de H-esp. H-commutatif sur $SU(\infty)$ et sur $SO(\infty)$ et $SU(\infty)/SO(\infty)$.

L'intérêt d'une telle déf est que la structure de H-espace est suffisante à donner une structure d'algèbre de Hopf à $H^*(X, k)$: on peut montrer en effet montrer que toute bi-algèbre connexe ($A^0 = k$, ce qui est le cas si X est connexe par arcs) est automatiquement de Hopf, càd admet un antipode.

Rmq. Il est facile de montrer que le $\pi_1(X)$ d'un H-esp. (connexe par arcs) est abélien et qu'il agit trivialement sur l'homologie/cohomologie de $\tilde{X}/X$.

III Algèbres de Cohomologie des H-espaces.

Tout espace est connexe par arcs d'or et en avant.

Trois résultats de la thèse de Serre :

Théorème 0 : L'espace $E_x X$ des chemins basés en $x \in X$

et muni de la projection $(\gamma \in E_x X) \mapsto \gamma(1)$ est un espace fibré à fibre $\Omega_x X$, et il est contractible.

où

<u>**Def**</u> Une fibration (ou un espace fibré) est un triple $p : E \to B$ où p surj. et continue telle que pour tout

$[0,1]^n$ polyèdre fini P et toute paire d'applications continues

$f : P \times [0,1] \to B$ et $g : P \to E$ tq. $p \circ g(x) = f(x,0)$,

$\exists\ h : P \times [0,1] \to E$ continue tq. $p \circ h = f$ et $h(x,0) = g(x)$ $\forall x$.

$$\begin{tikzcd} P = P\times\{0\} \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ P\times[0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$